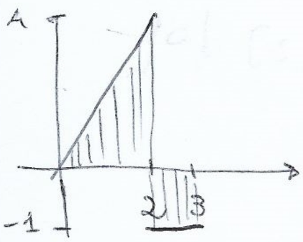
26/06/19 - PARI

4°) Dire se le seg. funz. sono R-int.li e nei casi affermativi calcolarne l'integrale:

$$f(x) = \begin{cases} \log x & x \in]0,2] \\ -1 & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,2] \\ -1 & x \in]2,3] \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \log x = -\infty \Rightarrow f$ non è limit $\Rightarrow f$ non è integrabile



g è def in $[0,3]$, che è misurabile, è limitata ed è discontinua solo in un punto, quindi essa è integrab.; si può calcolare $\int^3 g(x)dx$ col T.F.C.I oppure facendo ricorso alla definizione di integrale e a nozioni di geom. elementare, cioè:

$$\int_0^3 g(x)dx = \frac{2 \cdot 4}{2} - 1 \cdot 1 = 3$$

5°) Scrivere f^+ ed f^- per $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\log x}$ $\forall x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$ -

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \log x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, e]$, perciò

$$f^+(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\log x} & x \in [1, e] \\ 0 & \text{se } x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right] \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [1, e] \\ -\frac{\sqrt{x^2+1}}{\log x} & \text{se } x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right] \end{cases}$$

26/06/19 - PARI

1°) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2(e^{\frac{1}{x}}+2)(1-e^{1/x})}dx = \left\{ \begin{array}{l} t = e^{1/x} \\ \Downarrow \\ dt = -\frac{e^{1/x}}{x^2}dx \end{array} \right\} = \int -\frac{dt}{(t+2)(1-t)} = \int \frac{dt}{(t+2)(t-1)}$

$= \left\{ \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1} = \frac{At - A + Bt + 2B}{(t+2)(t-1)} = \frac{(A+B)t + 2B - A}{(t+2)(t-1)} \iff \begin{cases} A+B=0 \\ 2B-A=1 \end{cases} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} A=-B \\ B=1/3 \end{array} \right\} = -\frac{1}{3}\log|t+2| + \frac{1}{3}\log|t-1| + c = \ldots\ldots$

2°) Det. $K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan 2x - 2x}{\sin^3 x} & x \in [-2,2]-\{0\} \\ 3K & x=0 \end{cases}$

soddisfi hp t. Weierstrass.

Il dom. deve essere chiuso e limitato, e $[-2,2]$ lo è; f è continua in ogni $x \in [-2,2]-\{0\}$ perché rapporto di funz. continue; affinché lo sia anche in 0 deve risultare

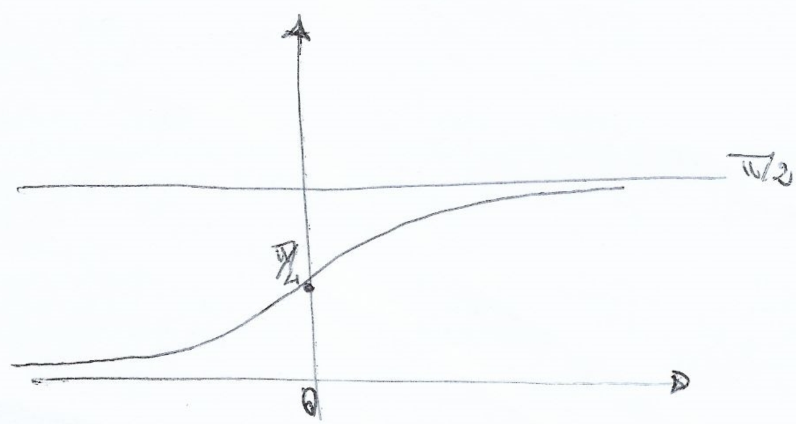
$f(0) = 3K = \lim_{x\to 0} f(x) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2(1+tg^2 2x)-2}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{tg^2 2x}{4x^2}\cdot\frac{4x^2}{x^2} = \frac{8}{3}$

$\iff 3K = \frac{8}{3} \Rightarrow K = 8/9$

3°) $f(x) = \operatorname{arccotg}(e^{-x})$ $\qquad D = \mathbb{R}$, $f > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = \pi/4$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $f'(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$;

$f''(x) = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} \geq 0 \iff 1 \geq e^{2x} \iff x \leq 0$



27/06/19 – DISPARI

1) $$\int \frac{e^{1/x}}{(e^{1/x}-5)(2+e^{1/x})x^2}\,dx = \left\{ t := e^{1/x} \Rightarrow dt = -\frac{e^{1/x}}{x^2}dx \right\}$$

$$= \int -\frac{dt}{(t-5)(2+t)} = \int \frac{dt}{(5-t)(2+t)} = \left\{ \frac{1}{(5-t)(2+t)} = \frac{A}{5-t} + \frac{B}{2+t} = \frac{2A+At+5B-Bt}{(5-t)(2+t)} = \right.$$

$$= \frac{(A-B)t+(2A+5B)}{(5-t)(2+t)} \iff \left\{\begin{array}{l} A-B=0 \\ 2A+5B=1 \end{array}\right. \left.\begin{array}{l} A=1/7 \\ B=A \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{7}\log|5-t| + \frac{1}{7}\log|2+t| = \ldots \text{etc.}$$

2) Le ip. del T. di Bolzano sono il fatto che il dominio sia un intervallo e che la funz. sia continua. f è definita in $\{x \in \mathbb{R} : -1 \le 3x \le 1\} = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$; è continua in ogni elemento di $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] - \{0\}$ perché differ. di funz. continue $\forall x \in \mathbb{R}$; affinché sia continua anche in 0 deve essere $\lim_{x\to 0} 3x - \arcsin 3x = f(0) = \frac{\alpha}{2}$ $\iff 0 = \frac{\alpha}{2} \iff \alpha = 0$.

3) $f(x) = \arctan(e^{-x})$

$D = \mathbb{R}$;

$f(x) \ge 0 \iff e^{-x} \ge 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

$f(0) = \arctan(1) = \pi/4$

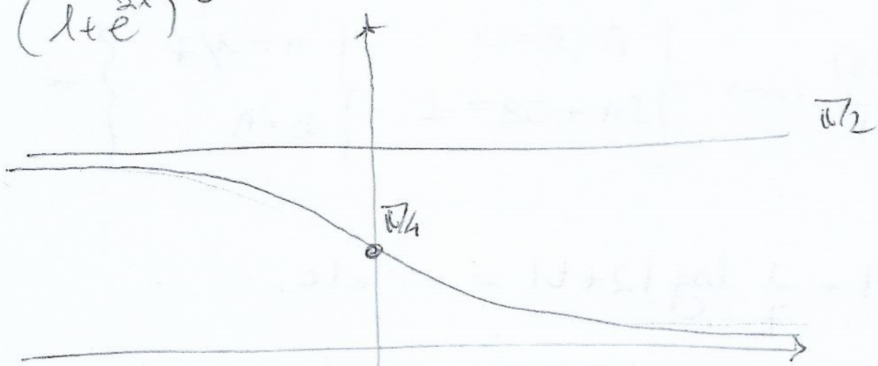
27/06/19 - DISPARI

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arctan(0) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pi/2$

$f'(x) = -\frac{e^{x}}{e^{2x}+1} < 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$f''(x) = \frac{e^{x}(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} \geq 0 \iff 1\geq e^{2x} \iff x\leq 0$

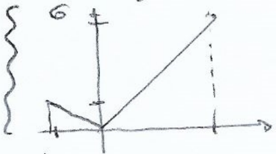


4°) Dire se $f(x)=\sin x$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=|x|$ $\forall x\in[-1,6[$ e

$h(x)=\begin{cases}3 & \text{se } x\in[0,1]\\ 5 & \text{se } x\in]1,3]\end{cases}$ sono R-int.li, e in caso posit. calcolarne l'integrale.

f non è int.le perché il dom. è illimitato, quindi non misur.

g è limitata ($\lim_{x\to6} g(x)=6\in\mathbb{R}$), il dom. è misurabile e g è continua, quindi soddisfa una c.s. per l'integrabilità.

$\int_{-1}^{6} g(x)\,dx = \Big\{$  $\Big\} = \frac{1}{2} + \frac{6\cdot 6}{2} = \frac{37}{2}$ (oppure, per il calcolo, si può usare il T.F.Calc.int.le)

h è continua in $[0,3]-\{1\}$, è limitata (ha cod $=\{3,5\}$) ed è def. in un dom. misurabile, quindi è integr. e $\int_0^3 h(x)\,dx = 3\cdot 1+5\cdot 2=13$

5°) L'eq.ne è $y = F'(3)(x-3)+F(3)$, ove

$F'(x) = e^{-\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow F'(3) = e^{-\sqrt{13}}$, $F(3) = \int_1^3 e^{-\sqrt{t^2+4}}\,dt$